§ A Matriz de Transferência para as Teorias de Campo

Tentaremos agora estabelecer ligações mais gerais entre a Teoria de Campos e a Mecânica Estatística. Seja ϕ um campo escalar definido num espaço--tempo d-dimensional (como na aula anterior). Tal campo pode autoacoplar-se, com termos do tipo

$$\phi^3,\ \phi^4, \ldots$$

Neste caso particular, consideramos uma teoria ϕ^4, com Lagrangiano

$$(1) \quad L = \int d^{(d-1)}x \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu_0 \phi^2 - \lambda_0 \phi^4 \right],$$

onde seguimos a notação de Kogut, RMP, 51, 659 (1979).

A relação (1) define uma Densidade Lagrangiana

$$(2) \quad \mathcal{L}_0(\phi, \partial_t\phi, \nabla\phi) = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 - (\nabla\phi)^2\right] - \frac{1}{2}\mu_0\phi^2 - \lambda_0\phi^4.$$

A Densidade Lagrangeana livre é

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 - \nabla\phi^2\right] - \frac{1}{2}\mu_0\phi^2 \quad , \quad \text{que}$$

representa um campo livre de partículas escalares de spin $S=0$, e massa μ_0 em $(d-1)$ dimensões

$$\nabla\phi = (\partial_1\phi, \partial_2\phi, \ldots, \partial_{d-1}\phi) \qquad (3)$$

Exatamente como no caso do oscilador harmônico, é conveniente continuar analiticamente as expressões para tempo imaginário. Supondo que isto sempre pode ser feito, a continuação formulamos uma teoria anisotrópica numa rede no espaço-tempo discretizando as integrais e derivadas (trabalhamos com somas e diferenças finitas respectivamente). Seja $\underline{a}$ o parâmetro da rede na direção espacial e seja $\Delta\tau$ o parâmetro na direção temporal (imaginária).

Discretizamos a correspondente ação euclideana

$$I = \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \int d^{(d-1)}x \left[\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu_0\phi^2 + \lambda_0\phi^4 \right], \qquad (4)$$

numa rede onde as posições são denotadas por $n = (n_0, n_1, n_2 \ldots n_{d-1})$, onde n_0 se refere à direção temporal. Um operador de diferença finita é definido por

$$\Delta_\mu f(n) \equiv f(n+\mu) - f(n)$$

Seja $\vec{\mu}$ o correspondente vetor $\vec{\mu} = (\mu_0, \mu_1 \ldots \mu_{d-1})$

Comentário

O momento canônico dessa teoria é dado por

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi$$

e obtemos a Densidade Hamiltoniana por:

$$\mathcal{H} = P(\partial_t \phi) - \mathcal{L}_0$$

$$= p(\underbrace{\partial_t \phi}_{P}) - \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \phi^2 + \\ + \lambda_0 \phi^4$$

ou

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu_0\phi^2 + \lambda_0\phi^4$$

com Hamiltoniano:

$$H = \int d x^{(d-1)} \left\{ \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu_0\phi^2 + \lambda_0\phi^4 \right\}$$

No limite $|\vec{\mu}| \approx 0$ temos a relação:

$$\Delta_\mu f(n) = f(n+\mu) - f(n) = \vec{\mu}\cdot\nabla f$$

onde $\nabla = (\partial_0, \partial_1, \partial_2 \dots \partial_{d-1})$. Definindo:

$$\Delta_0 f \equiv \Delta_{\mu_0=1} f(n) = f(n_0+1, n_1 \dots n_{d-1}) - f(n_0, n_1 \dots n_{d-1})$$
$$= \Delta\tau\, \partial_0 f$$

logo $$(\partial_0 f)^2 \longrightarrow \frac{1}{(\Delta\tau)^2} \Delta_0^2 f(n)$$

O elemento de volume transforma como
$$d\tau\, d^{(d-1)}x \longrightarrow \Delta\tau\, a^{d-1}$$

Para a parte espacial definimos também:

$$\Delta_k f \equiv \Delta_{\mu_k=1} f(n) = f(n_0, n_1 \dots n_k+1, \dots n_{d-1}) - f(n_0, n_1 \dots n_k \dots n_{d-1})$$

$$= a\,\partial_k f(n) \quad , \text{ para } k = 1, 2, \dots, (d-1)$$

ou
$$(\partial_k f)^2 = a^{-2} (\Delta_k f)^2 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, (d-1)$$

Assim a Ação Euclideana discretizada pode ser escrita como uma soma sobre uma rede

$$I = \sum_{n} \left\{ \frac{1}{2} \frac{a^{d-1}}{\Delta\tau} \left[\Delta_0 \phi(n)\right]^2 + \frac{1}{2} \Delta\tau a^{d-3} \sum_{k=1}^{d-1} \left[\Delta_k \phi(n)\right]^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \Delta\tau a^{d-1} \mu_0^2 \phi^2(n) + \Delta\tau a^{d-1} \lambda_0 \phi^4(n) \right\} \qquad (5)$$

A notação $n = (n_0, \vec{n})$ será usada às vezes. Redefinimos as constantes da ação euclideana dada por (5):

$$\left.\begin{aligned} K_\tau &\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{a^{d-1}}{\Delta\tau}\right) \\ K &\equiv \frac{1}{2}\Delta\tau a^{d-3} \\ b_0 &\equiv \frac{1}{2}\Delta\tau a^{d-1}\mu_0^2 \\ u_0 &\equiv \Delta\tau a^{d-1}\lambda_0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

K_τ faz as vezes de acoplamento entre primeiros vizinhos na direção temporal, e K a do acoplamento na direção espacial. K_τ e K são iguais só no caso $\Delta\tau = a$, que é o chamado <u>caso isotrópico</u>. A nossa ação fica agora

$$I = \sum_{n} \left\{ K_\tau (\Delta_0 \phi)^2 + K \sum_{i} (\Delta_i \phi)^2 + b_0 \phi^2(n) + u_0 \phi^4(n) \right\} \qquad (7)$$

e a integral de trajetória para a rede é

$$Z = \prod_{n} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(n) \; e^{-I} \qquad (8)$$

que pode ser pensada como a função de partição de um problema d-dimensional de mecânica estatística. A integral (8) é feita sobre todas as configurações possíveis do campo, com $-\infty < \phi < +\infty$ (neste caso consideramos $\hbar \equiv 1$), e o Hamiltoniano clássico é dado por (7). As condições de contorno consistem de especificar o campo numa "fatia" temporal inicial e final, como feito para o oscilador harmônico. Outra vez podemos introduzir a matriz de transferência que propaga o campo $\phi(n)$ na direção temporal. Se chamamos ϕ' o valor do campo na fatia temporal próxima

$$\phi'(\vec{n}) \equiv \phi(n_0+1, \vec{n}) \,, \qquad (9)$$

queremos escrever a função partição como:

$$Z = \prod_{n} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(n) \; T(\phi, \phi') \,, \qquad (10)$$

onde $T(\phi,\phi')$ é o elemento de matriz do operador $\hat{T}$

$$T(\phi,\phi') = \langle \phi' | \hat{T} | \phi \rangle = \exp\Big[- \sum_{\vec{n}} \Big(K_\tau \left[\phi'(\vec{n}) - \phi(\vec{n}) \right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} K \sum_i \left\{ \left[\phi'(\vec{n}+\hat{e}_i) - \phi'(\vec{n}) \right]^2 + \left[\phi(\vec{n}+\hat{e}_i) - \phi(\vec{n}) \right]^2 \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} b_0 \left[\phi'^2(\vec{n}) + \phi^2(\vec{n}) \right] + \frac{1}{2} u_0 \left[\phi'^4(\vec{n}) + \phi^4(\vec{n}) \right] \Big) \Big], \quad (11)$$

onde o termo tem sido escrito de maneira simetrizada em (ϕ,ϕ').

Para obter o operador $\hat{T}$, a matriz de transferência, é necessário introduzir os operadores conjugados de campo, $\hat{\phi}(\vec{n})$ e $\hat{\Pi}(\vec{n})$,

$$\left[\hat{\Pi}(\vec{n}'), \hat{\phi}(\vec{n}) \right] = -i \, \delta_{\vec{n},\vec{n}'} \quad . \quad (12)$$

Logo:

$$\mathcal{Z} = \int \cdots \int \langle \phi(b) | \hat{T} | \phi(N-1) \rangle d\phi(N-1) \langle \phi(N-1) | \hat{T} | \phi(N-2) \rangle \cdots$$

$$\cdots d\phi(2) \langle \phi(2) | \hat{T} | \phi(1) \rangle d\phi(1)$$

$$\langle \phi(1) | \hat{T} | \phi(a) \rangle$$

$$= \langle \phi(b) | \hat{T}^N | \phi(a) \rangle ,$$

sendo $(N-1)$ o número de fatias temporales. Usando condições periódicas de contorno e somando sobre todas as possíveis configurações iniciais obtemos

$$\mathcal{Z} = \sum_{\phi} \langle \phi | \hat{T}^{N} | \phi \rangle = Tr(\hat{T}^{N}) \qquad (13)$$

A notação $|\phi(k)\rangle$ representa toda uma configuração do campo na fatía temporal $\underline{k}$, isto é

$$|\phi(k)\rangle = \bigotimes_{\vec{n}} |\phi(k,\vec{n})\rangle \qquad (14)$$

O operador $\hat{T}$ liga duas fatiás temporales sucesivas do campo. Escrevemos então

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &\equiv \bigotimes_{\vec{n}} |\phi(n_0,\vec{n})\rangle \\ |\phi'\rangle &\equiv \bigotimes_{\vec{n}} |\phi(n_0+1,\vec{n})\rangle \end{aligned} \qquad (15)$$

Introduzimos agora as autofunções do momento canônico:

$$\hat{\Pi}(\vec{n})\,|p(\vec{n})\rangle = p(\vec{n})\,|p(\vec{n})\rangle \,, \qquad (16)$$

e sejà

$$|p\rangle = \bigotimes_{\vec{n}} |p(\vec{n})\rangle \qquad (17)$$

Queremos calcular o elemento de matriz $\langle \phi' | \Omega | \phi \rangle$, onde $\hat{\Omega}$ é o operador

$$\hat{\Omega} \equiv \exp\left[- \sum_{\vec{n}} \frac{1}{4K_\tau} \hat{\Pi}^2(\vec{n}) \right] \qquad (18)$$

Teremos:

$$\langle \phi' | \hat{\Omega} | \phi \rangle = \int dp \, \langle \phi' | \hat{\Omega} | p \rangle \langle p | \phi \rangle$$

Lembremos que

$$dp = \prod_{\vec{n}} dp(\vec{n})$$

$$\langle p | \phi \rangle = \prod_{\vec{n}} \langle p(\vec{n}) | \phi(\vec{n}) \rangle$$

e

$$\langle \phi' | \exp\Big(- \sum_{\vec{n}} \frac{1}{4K_\tau} \hat{\Pi}^2(\vec{n}) \Big) | p \rangle =$$

$$= \prod_{\vec{n}} \exp\Big[- \frac{p^2(\vec{n})}{4K_\tau} \Big] \langle \phi'(\vec{n}) | p(\vec{n}) \rangle$$

Assim:

$$\langle \phi' | \hat{\Omega} | \phi \rangle = \prod_{\vec{n}} \int_{-\infty}^{\infty} dp(\vec{n}) \, \exp\Big[- \frac{p^2(n)}{4K_\tau} \Big] \langle \phi'(\vec{n}) | p(\vec{n}) \rangle \langle p(\vec{n}) | \phi(\vec{n}) \rangle \quad (19)$$

► Exercício. Mostrar que sendo $\hat{\Phi}(\vec{n})$ e $\hat{\Pi}(\vec{n})$ variáveis canônicamente conjugadas obtemos:

$$\langle \phi(\vec{n}) | p(\vec{n}) \rangle = \frac{e^{i p(\vec{n}) \phi(\vec{n})}}{\sqrt{2\pi}} \quad (20)$$

Assim a integral se reduz a calcular uma transformada de

Problema ($\hbar \equiv 1$)

Seja $\hat{\Pi}(\vec{n})$ o conjugado do campo $\hat{\phi}(\vec{n})$, com relação de comutação:

$$\left[\hat{\phi}(\vec{n}), \hat{\Pi}(\vec{n}')\right] = i\,\delta_{\vec{n},\vec{n}'} .$$

Para um dado $\vec{n}' = \vec{n}$, escrevemos:

$$[\hat{\phi}, \hat{\Pi}] = i . \qquad (1)$$

Essa relação canônica implica que $\hat{\Pi}$ é o gerador infinitesimal das translações em $\hat{\phi}$ (deslocamentos do campo). Em efeito:

$$e^{i\delta\phi'\hat{\Pi}}\,\hat{\phi}\,e^{-i\delta\phi'\hat{\Pi}} =$$

$$= \hat{\phi} + i\,\delta\phi'\,\underbrace{[\hat{\Pi}, \hat{\phi}]}_{-i} - \frac{1}{2!}\left[\delta\phi'\hat{\Pi}, \left[\delta\phi'\hat{\Pi}, \hat{\phi}\right]\right] \cdots$$

$$= \hat{\phi} + \delta\phi' ,$$

em forma fechada.

Assim, definimos o operador de translação por

$$\mathcal{T}(\delta\phi') \equiv e^{-i\delta\phi'\hat{\Pi}} , \qquad (2)$$

com

$$\mathcal{T}(\delta\phi')|\phi'\rangle \equiv |\phi'+\delta\phi'\rangle \,. \qquad (3)$$

Seja agora $|\alpha\rangle$ um ket arb. Operamos com $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}(\delta\phi')|\alpha\rangle = \int d\phi' \, \mathcal{T}(\delta\phi')|\phi'\rangle\langle\phi'|\alpha\rangle =$$

$$= \int d\phi' \, |\phi'+\delta\phi'\rangle\langle\phi'|\alpha\rangle \,.$$

Mudar de variável $\phi' \longrightarrow \phi'' \equiv \phi'+\delta\phi' \Leftrightarrow \phi' = \phi''-\delta\phi'$

$$= \int d\phi'' \, |\phi''\rangle\langle\phi''-\delta\phi'|\alpha\rangle \,,$$

e para $\delta\phi'$ 'pequeno' expandimos o bra-c-ket:

$$\langle\phi''-\delta\phi'|\alpha\rangle = \langle\phi''|\alpha\rangle - \delta\phi' \frac{\partial}{\partial\phi''}\langle\phi''|\alpha\rangle$$

Projetando sobre $|\phi\rangle$:

$$\langle\phi|\mathcal{T}(\delta\phi')|\alpha\rangle = \langle\phi|(1-i\delta\phi'\hat{\Pi})|\alpha\rangle =$$

$$= \int d\phi'' \underbrace{\langle\phi|\phi''\rangle}_{\delta(\phi''-\phi)} \left\{ \langle\phi''|\alpha\rangle - \delta\phi' \frac{\partial}{\partial\phi''}\langle\phi''|\alpha\rangle \right\}$$

$$= \langle\phi|\alpha\rangle - \delta\phi' \frac{\partial}{\partial\phi}\langle\phi|\alpha\rangle \,.$$

Obtemos:

$$\langle \phi | \alpha \rangle - i\delta\phi' \langle \phi | \hat{\Pi} | \alpha \rangle =$$

$$= \langle \phi | \alpha \rangle - \delta\phi' \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | \alpha \rangle$$

$\delta\phi'$ é arb. ($|\alpha\rangle$ também):

$$i\cancel{\delta\phi'} \langle \phi | \hat{\Pi} | \alpha \rangle = \cancel{\delta\phi'} \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | \alpha \rangle$$

ou

$$\boxed{i\langle \phi | \hat{\Pi} | \alpha \rangle = \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | \alpha \rangle.} \quad (4)$$

Agora, seja $|\alpha\rangle = |p\rangle$, auto-ket de $\hat{\Pi}$:

$$\hat{\Pi} |p\rangle = p |p\rangle .$$

Substituindo em (4), obtemos:

$$i p \langle \phi | p \rangle = \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \phi | p \rangle , \quad (5)$$

que é uma eq. diferencial, com solução:

$$\langle \phi | p \rangle = A \exp(i p \phi)$$

Calculamos A :

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \delta(\phi - \phi') = \int dp \, \langle \phi | p \rangle \langle p | \phi' \rangle$$

$$= |A|^2 \int dp \, \exp\left[i \, p \, (\phi - \phi') \right],$$

usando a representação da delta de Dirac:

$$|A|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Escolhendo a fase (arb.) como sendo nula, resulta:

$$\boxed{\langle \phi | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{i p \phi}}.$$

Fourier de uma gaussiana

$$\langle \phi' | \hat{\Omega} | \phi \rangle = \prod_{\vec{m}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp(\vec{m})\, e^{-\frac{p^2(\vec{m})}{4K_\tau}}\, e^{i p(\vec{m})[\phi'(\vec{m}) - \phi(\vec{m})]}$$

$$= \prod_{\vec{m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{4K_\tau}{2}}\, \exp\left\{ -\frac{4K_\tau}{4} \left[\phi'(\vec{m}) - \phi(\vec{m}) \right]^2 \right\}$$

$$= \prod_{\vec{m}} \left(\frac{K_\tau}{\pi} \right)^{1/2} \exp\left\{ -K_\tau \left[\phi'(\vec{m}) - \phi(\vec{m}) \right]^2 \right\}$$

$$= \text{cte} \times \exp\left\{ -\sum_{\vec{m}} K_\tau \left[\phi'(\vec{m}) - \phi(\vec{m}) \right]^2 \right\} \qquad (21)$$

O prefator constante é incluido na medida, na integral de trajetória. O operador que representa $\hat{T}$ pode então ser escrito como:

$$\hat{T} = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{\vec{m}} \left\{ K \sum_i \left[\hat{\phi}'(\vec{m}+\hat{e}_i) - \hat{\phi}'(\vec{m}) \right]^2 + b_0 \hat{\phi}'^2(\vec{m}) + u_0 \hat{\phi}'^4(\vec{m}) \right\} \right] \times$$

$$\times \exp\left\{ -\sum_{\vec{m}} \frac{1}{4K_\tau} \hat{\Pi}^2(\vec{m}) \right\} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{\vec{m}} \left\{ K \sum_i \left[\hat{\phi}(\vec{m}+\hat{e}_i) - \hat{\phi}(\vec{m}) \right]^2 + b_0 \hat{\phi}^2(\vec{m}) + u_0 \hat{\phi}^4(\vec{m}) \right\} \right] \qquad (22)$$

Lembramos que em geral $\hat{T}$ não pode ser escrito como a exponencial de um operador simples. Se escolhermos $\Delta\tau = a$, e a rede é simétrica, podemos forçar $\hat{T}$ na forma

$$\hat{T} = e^{-\Delta\tau \hat{\mathcal{H}}_S}, \qquad (23)$$

mas $\hat{\mathcal{H}}_S$ é um Hamiltoniano extremamente complicado.

A noção de traslações infinitesimais no tempo não existe aqui, mas a mecânica Estatística é bastante elegante porque $K = K_\tau$ (caso isotrópico). Alternativamente podemos considerar o caso altamente anisotrópico, onde é tomado o limite contínuo na direção temporal, mantendo <u>a</u> fixo:

$$\lim_{\Delta\tau\to 0} \hat{T} = 1 - \Delta\tau \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2} a^{-(d-1)} \hat{\Pi}^2(\vec{n}) -$$

$$-\Delta\tau \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2} a^{d-3} \sum_i \left[\hat{\phi}(\vec{n}+\hat{e}_i) - \hat{\phi}(\vec{n})\right]^2$$

$$-\Delta\tau \sum_{\vec{n}} \left[\frac{1}{2} a^{d-1} \mu_0^2 \hat{\phi}^2(\vec{n}) + a^{d-1} \lambda_0 \hat{\phi}^4(\vec{n})\right] + o(\Delta\tau), \qquad (24)$$

que pode ser escrito na forma

$$\lim_{\Delta\tau\to 0} \hat{T} \cong e^{-\Delta\tau \hat{\mathcal{H}}} \cong 1 - \Delta\tau \hat{\mathcal{H}} \quad \text{, onde} \qquad (25)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{n}} \frac{a^{-(d-1)}}{2} \hat{\Pi}^2(\vec{n}) + \sum_{\vec{n}} a^{d-3} \frac{1}{2} \sum_i \left[\hat{\phi}(\vec{n}+\hat{e}_i) - \hat{\phi}(\vec{n})\right]^2$$

$$+ \sum_{\vec{n}} a^{d-1} \left\{ \frac{1}{2}\mu_0^2 \hat{\phi}^2(\vec{n}) + \lambda_0 \hat{\phi}^4(\vec{n}) \right\} \qquad (26)$$

que é a versão Hamiltoniana da teoria de campos inicialmente $\underbrace{\text{formulada}}_{}$ Ver (5). No caso de querer passar ao limite contínuo no espaço, deve-se definir um outro operador

$$\hat{P}(\hat{n}) = a^{-(d-1)} \hat{\Pi}(\hat{n}) \,, \qquad (27)$$

Assim o comutador a tempos iguais fica:

$$\left[\hat{\phi}(\vec{n}'), \hat{P}(\hat{n})\right] = i \frac{\delta_{\vec{n},\vec{n}'}}{a^{d-1}} \xrightarrow[a \to 0]{} i\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (28)$$

Também

$$\left[\hat{\phi}(\hat{n}+\hat{e}_i) - \hat{\phi}(\hat{n})\right] \longrightarrow a\,\partial_i \phi(\vec{n}) \qquad (29)$$

Escrevemos o Hamiltoniano como

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{n}} a^{(d-1)} \left\{ \frac{1}{2} \hat{P}^2(\vec{n}) + \frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{\hat{\phi}(\vec{n}+\hat{e}_i) - \hat{\phi}(\hat{n})}{a}\right]^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\mu_0^2 \hat{\phi}^2(\vec{n}) + \lambda_0 \hat{\phi}^4(\vec{n}) \right\} \qquad (30)$$

e no limite contínuo vira

$$\mathcal{H} \xrightarrow[a\to 0]{} \int d^{(d-1)}x \left\{ \frac{1}{2}\hat{P}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}\left(\nabla\hat{\phi}(\vec{x})\right)^2 + \frac{1}{2}\mu_0^2\hat{\phi}^2(\vec{x}) + \right.$$

$$\left. + \lambda_0 \hat{\phi}^4(\vec{x}) \right\} \qquad (31)$$

É interessante observar o que acontece com as constantes de acoplamento no modelo de rede no limite anisotrópico:

$$\Delta\tau \to 0, \quad \underline{a} \text{ finito.}$$

Temos

$$\left.\begin{aligned} K_\tau &= \frac{a^{d-1}}{2\Delta\tau} \xrightarrow[\Delta\tau\to 0]{} \infty \\ K &= \frac{\Delta\tau\, a^{d-3}}{2} \xrightarrow[\Delta\tau\to 0]{} 0 \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

mas o produto fica finito !!

$$K_\tau K = \frac{a^{d-1}}{2\Delta\tau} \cdot \frac{\Delta\tau\, a^{d-3}}{2} = \frac{1}{4} a^{2(d-2)} \qquad (33)$$

Isto acontece porque a física é a mesma em todas as versões de redes diferentes.

Lembrança: com as definições

$$\Delta_0 \phi \equiv \phi(n_0+1, \vec{n}) - \phi(n_0, \vec{n}),$$

$$\Delta_i \phi \equiv \phi(n_0, n_1 \dots n_i+1 \dots) - \phi(n_0, n_1 \dots n_i \dots),$$

re-escrevemos o Hamiltoniano de rede em (7) como:

$$I \longrightarrow \mathcal{H} = \sum_{n_0, \vec{n}} \Big\{ K_\tau \left[\phi(n_0+1, \vec{n}) - \phi(n_0, \vec{n})\right]^2 +$$

$$(7') \quad + K \sum_{i=1}^{d-1} \left[\phi(n_0, n_1 \dots n_i+1 \dots) - \phi(n_0, n_1 \dots n_i \dots)\right]^2 +$$

$$+ b_0 \phi^2(n_0, \vec{n}) + u_0 \phi^4(n_0, \vec{n}) \Big\}.$$

Observamos que o acoplamento na direção temporal é dado por:

$$-K_\tau \, \phi(n_0+1, \hat{n}) \phi(n_0, \vec{n})$$

e na direção espacial por:

$$-K \phi_0(n_0, n_1 \dots n_i+1 \dots) \phi_0(n_0, n_1 \dots n_i \dots),$$

com $i = 1, 2, \dots (d-1)$.

No limite de tempo contínuo, o acoplamento na direção temporal cresce, enquanto o acoplamento na direção espacial é cada vez mais fraco.

Como subproduto do desenvolvimento acima, temos obtido a EQUIVALÊNCIA entre a Mecânica Estatística de um sistema clássico em 'd'-dimensões, com Hamiltoniano de rede dado por (7) e (7'), com um modelo em (d-1)-dim de uma Teoria Quântica de Campos, com Hamiltoniano (31). A equivalência é obtida, usando a matriz de Transferência.